

2022年度高大接続型自己推薦入学試験事前課題

解答作成に関する注意

- この問題は、中央大学工学部ビジネスデータサイエンス学科、2022年度高大接続型自己推薦入学試験の出願書類に含まれる事前課題です。(以下「本課題」と書きます。)
- 本課題の解答を A4 サイズの用紙に自筆でまとめてください。枚数は問いません。
- 提出する解答用紙にはページ番号を振ってください。
- 本課題の全ての問題を解くことを必須とはしませんが、できる限り多くの問題を解くことが望まれます。
- 教科書の説明などにより自明とみなされるものを除き、解答に至るまでの過程も記述してください。
- 本課題の解答にあたっての筆記用具は指定しませんが、消えやすいものや滲みやすいものは使用しないでください。
- 本課題の解答にあたっては、どの問題について解いているのかが分かるように記述してください。
- 提出にあたっては、大学指定の「所定用紙 No.2-(1)」に在籍・出身学校名、氏名、生年月日、性別を記入して表紙とし、表紙と解答本文を重ねて左上をホチキスで留めて下さい。
- 提出された本課題の解答は、第1次の書類選考に用いる以外に、第2次選考の面接においても解答内容について質問することがあります。

1 確率

問題 1.1 以下を求めよ。

- (1) 2人でじゃんけんをするとき、あいこになる確率
- (2) 3人でじゃんけんをするとき、あいこになる確率
- (3) 4人でじゃんけんをするとき、3人が勝ち、1人が負ける確率
- (4) 4人でじゃんけんをするとき、あいこになる確率

問題 1.2 さいころを n 回振って出た目を X_1, X_2, \dots, X_n とする。以下の確率を求めよ。

- (1) $P(X_1 \leq 2)$ (= 事象 $X_1 \leq 2$ が起こる確率)
- (2) $P(X_1 + X_2 \leq 5)$
- (3) $P(X_1 X_2 = 4)$
- (4) $P(X_1 X_2 X_3 = 6)$
- (5) $P(X_1 X_2 X_3 = 12 \text{ の倍数})$
- (6) $P(X_1 X_2 \cdots X_n = 1)$
- (7) $P(X_1 X_2 \cdots X_n = 2)$
- (8) $P(X_1 X_2 \cdots X_n = 2 \text{ の倍数})$
- (9) $P(X_1 X_2 \cdots X_n = 6)$
- (10) $P(X_1 X_2 \cdots X_n = 6 \text{ の倍数})$
- (11) $P((X_1 - 3)^2 + \cdots + (X_n - 3)^2 = 0)$
- (12) $P((X_1 - 3)^2 + \cdots + (X_n - 3)^2 = 1)$
- (13) $P((X_1 - 3) \times \cdots \times (X_n - 3) = 1)$
- (14) $P((X_1 - 3) \times \cdots \times (X_n - 3) = 2)$
- (15) $P((X_1 - 3) \times \cdots \times (X_n - 3) = 0)$
- (16) X_1, X_2, \dots, X_n のうち 3 以上の目が出た回数を Y とするとき $P(Y = k)$
- (17) Z 回目にはじめて 3 以上の目が出るとき $P(Z = k)$
- (18) 前問の Z について、 $P(Z \leq k)$
- (19) X_1, X_2, \dots, X_n の最大値を M_n とするとき $P(M_n \leq k)$
- (20) 前問の M_n について、 $P(M_n = k)$
- (21) $M_n = 3$ という条件の下で 3 の目が 2 回出る確率

問題 1.3 ツボの中に 30 個の白玉と 40 個の黒玉がある。ここから 10 個の玉を取り出し、その中の白玉の個数を X とする。

- (1) $P(X = k)$ を求めよ
- (2) $P(X = k)$ を最大にする k を求めよ

問題 1.4 3人でじゃんけんを行い、1人だけが勝つまでじゃんけんを行う。 k 回目のじゃんけんで初めて1人の勝者が決まる確率を P_k とする。以下を求めよ。

- (1) P_1
- (2) P_2
- (3) P_k

問題 1.5 1から5までの数字が1つずつ書かれた5枚のカードがある。無作為にカードを1枚引き元に戻す試行を繰り返す。 i 回目の試行のカードの数字を X_i , $S_n = X_1 + \cdots + X_n$ また $T_n = X_1 X_2 \cdots X_n$ とする。以下を求めよ。

- (1) $P(S_n = n)$
- (2) $P(S_n = n + 1)$
- (3) $P(S_n = n + 2)$
- (4) $P(T_n = 4)$
- (5) $P(T_n = \text{偶数})$
- (6) $P(T_n = 3 \text{ の倍数})$
- (7) $P(S_n = 3 \text{ の倍数})$

2 命題と論理, 集合

問題 2.1 全体集合を $U = \{x|x \text{ は自然数で } x \leq 1000\}$ とする。 $A = \{x|x \text{ は } 3 \text{ の倍数, } x \in U\}$, $B = \{x|x \text{ は } 4 \text{ の倍数, } x \in U\}$, $C = \{x|x \text{ は } 5 \text{ の倍数, } x \in U\}$ とする。また, 一般に集合 W に対して $|W|$ を W の要素の個数とする。以下を求めよ。ただし, \emptyset は空集合, 集合 A^c は集合 A その補集合を表す。

- (1) $|A|$ (2) $|A^c|$ (3) $|A \cap B|$ (4) $|A \cup B|$ (5) $|A \cap B^c|$ (6) $|A \cap B \cap C|$
(7) $|A \cup B \cup C|$

また, 以下から正しいものを選べ。

- (ア) $\emptyset \subset A$ (イ) $\emptyset \in A$ (ウ) $\{\emptyset\} \subset A$ (エ) $A \cap B \subset A \cup B$ (オ) $C \subset A \cup B$
(カ) $(A \cap C) \cup B = (A \cup B) \cap (A \cup C)$ (キ) $(A \cup B)^c = A^c \cup B^c$ (ク) $(A \cap B)^c = A^c \cup B^c$
(ケ) $|B \cup C| = |B| + |C|$

問題 2.2 次の各命題について真か偽かを説明をつけて答えよ。

- (1) ある実数 x に対して $3^x > 4^x$
(2) すべての実数 x に対して $2^x > 0$
(3) すべての実数 x に対して $4^x > 3^x$
(4) すべての三角形において, ある内角は 60° 以上
(5) すべての三角形において, すべての内角は 90° 以下
(6) ある三角形において, すべての内角は 60° 以上
(7) ある三角形において, すべての内角は 60° より大きい
(8) ある実数 a に対して, すべての実数 x で $x^2 + ax + 1 > 0$
(9) ある実数 a に対して, すべての実数 x で $x^2 + ax - 1 > 0$
(10) すべての実数 x に対して, ある実数 a が存在して $x^2 + ax - 1 > 0$
(11) すべての実数 x , 実数 a に対して $x^2 + a^2 > 0$
(12) すべての実数 x , 実数 a に対して $x^2 + a^2 > 1$
(13) すべての実数 x に対して, ある実数 a が存在して $x^2 - a^2 > 1$
(14) ある実数 a が存在してすべての実数 x に対し $x^2 - a^2 > 1$
(15) ある実数 a が存在してすべての実数 x に対し $x^2 - a^2 > -1$

問題 2.3 以下の (1) ~ (10) に対して, 次に示す① ~ ④の中から当てはまるものを選べ。ただし, a, b, x, y は実数とする。

- ① P は Q であるための必要十分条件
② P は Q であるための必要条件であるが十分条件でない
③ P は Q であるための十分条件であるが必要条件でない
④ P は Q であるための必要条件でも十分条件でもない

- (1) P : $x^2 + y^2 \geq 25$ Q : $3x + 4y \geq 25$
(2) P : $x^2 + y^2 \leq 25$ Q : $3x + 4y \leq 25$
(3) P : $x^2 + y^2 \leq 25$ Q : $x + y \leq 1$

- (4) P : $a \sin \theta + b \cos \theta = 1$ ($0 \leq \theta \leq 2\pi$) に解が存在する Q : $a^2 + b^2 \leq 1$
- (5) P : $a + b > c$ Q : a, b, c がある三角形の 3 辺の長さ
- (6) P : $a + b > c$ かつ $a > 0$ かつ $b > 0$ かつ $c > 0$ Q : a, b, c がある三角形の 3 辺の長さ
- (7) P : $b < 0$ Q : x について 2 次方程式 $x^2 + ax + b = 0$ に実数解が存在
- (8) P : 四角形の対角線の長さが等しい Q : 長方形

3 整数

問題 3.1 1500 の約数の個数と約数の総和を求めよ。

問題 3.2 12 の倍数で約数の個数が 15 である自然数 n を求めよ。

問題 3.3 $30!$ は一の位からいくつ 0 が連続するか？

問題 3.4 n を自然数とすると、 $n^3 - 7n$ は 6 の倍数であることを証明せよ。

問題 3.5 n を自然数とすると、 $9^n + 4^{n+1}$ は 5 の倍数であることを証明せよ。

問題 3.6 3104 と 1649 の最大公約数を求めよ。

問題 3.7 (1) $7n$ と $3n + 1$ が互いに素ならば $n - 2$ と 7 は互いに素であることを示せ。
(2) $7n$ と $3n + 1$ が互いに素になる自然数は何個あるか？

問題 3.8 $7x - 19y = 1$ の整数解 (一般解) を求めよ。

問題 3.9 次の方程式を満たす整数の組 (x, y) を全て求めよ。

$$(1) xy - x + 3y = 0 \quad (2) 2xy - y + x - 3 = 0 \quad (3) \frac{1}{x} + \frac{2}{y} = 1$$

問題 3.10 次の数を小数で表したときの、小数第 n 位の数字 a_n を求めよ。

$$\left(\text{例 } \frac{1}{6} = 0.166\cdots \text{より, } a_1 = 1, a_5 = 6 \right)$$

$$(1) \frac{19}{37} \text{ の } a_{30} \quad (2) \frac{23}{132} \text{ の } a_1, a_2, a_{50}$$

4 数列

問題 4.1 以下を求めよ。

$$(1) \sum_{k=1}^n (2k^2 + k) \quad (2) \sum_{k=1}^n (3k + 1) \quad (3) \sum_{k=1}^{2n} 5^k \quad (4) \sum_{k=100}^{500} (3k - 1) \quad (5) \sum_{k=100}^{500} 3^k \quad (6) \sum_{k=100}^{300} 3^{2k+1}$$
$$(7) \sum_{k=200}^{\infty} 3^{-2k+1} \quad (8) \sum_{k=1}^{100} {}_{100}C_k \quad (9) \sum_{k=1}^{100} {}_{100}C_k 2^k \quad (10) {}_{10}C_3 + {}_{11}C_3 + {}_{12}C_3 + \cdots + {}_{20}C_3$$

問題 4.2 次を満たす数列の一般項 a_n を求めよ。

- (1) 初項 3 で公差が 4 の等差数列。
- (2) 初項 3 で公比が 4 の等比数列。
- (3) $a_{k+1} - a_k = 2, (k = 0, 1, 2, \dots, n)$ で $a_0 = 3$
- (4) $a_{k+1} - a_k = k^2, (k = 1, 2, \dots, n)$ で $a_1 = 2$
- (5) $a_{k+1} = 3a_k + 1, (k = 1, 2, \dots, n)$ で $a_1 = 2$
- (6) $a_{k+1} = 3a_k + k, (k = 0, 1, 2, \dots, n)$ で $a_0 = 2$
- (7) $a_{k+1} - 5a_k + 6a_{k-1} = 0, (k = 1, 2, \dots, n)$ で $a_0 = 1, a_1 = 7$
- (8) $ka_{k+1} = (k+1)a_k + 1, (k = 1, 2, \dots, n)$ で $a_1 = 1$
- (9) $(k+3)a_{k+1} = ka_k, (k = 1, 2, \dots, n)$ で $a_1 = 1$

問題 4.3 以下を求めよ。

$$(1) \sum_{k=1}^n \left(\sum_{\ell=1}^k \ell \right) \quad (2) \sum_{k=1}^n k(n-k) \quad (3) \sum_{k=1}^n \frac{1}{k(k+1)} \quad (4) \sum_{k=1}^n \frac{1}{k(k+1)(k+2)} \quad (5) \sum_{k=1}^n k3^{k-1}$$

5 極限

問題 5.1 以下の数列の極限を求めよ。

$$\begin{aligned} (1) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n^2 + 2n + 1}{n^2 - n} & \quad (2) \lim_{n \rightarrow \infty} n \left(e^{\frac{5}{n}} - 1 \right) & (3) \lim_{n \rightarrow \infty} n \sin \frac{5}{n} & (4) \lim_{n \rightarrow \infty} n \sin \frac{5}{n^2} \\ (5) \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{3}{n} \right)^n & (6) \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{3}{n} + \frac{2}{n^2} \right)^n & (7) \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{3}{n^2} \right)^n & (8) \lim_{n \rightarrow \infty} n \log \left(1 + \frac{2}{n} \right) \\ (9) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sin(n^5) & (10) \lim_{n \rightarrow \infty} \log \left(5 + \frac{2}{n} \right) & (11) \lim_{n \rightarrow \infty} (3^n + 2^n)^{\frac{1}{n}} \end{aligned}$$

問題 5.2 以下の関数の極限を求めよ。

$$\begin{aligned} (1) \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 + 3}{x + 2} & (2) \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 9}{x - 3} & (3) \lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sin(x - 3)}{x - 3} & (4) \lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sin x - \sin 3}{x - 3} & (5) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{3x} - 1}{x} \\ (6) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{3x} - 1 - ax}{x^2} & (\text{極限が有限値として存在する } a \text{ も求めよ}) & (7) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x}{x} \\ (8) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x^2}{x^2} & (9) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x^2}{x} & (10) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sin 3x}{x} & (11) \lim_{x \rightarrow \infty} (3^x + 2^x)^{\frac{1}{x}} \\ (12) \lim_{x \rightarrow 0} x \log(1 + 3x) & (13) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} \log(1 + 3x) & (14) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x^2} \log(1 + 3x) \end{aligned}$$

6 微分

関数 6.1 次の関数の導関数を計算せよ。

- (1) x^5 (2) x^π (3) e^{5x} (4) $e^{\pi x}$ (5) π^x (6) $\log x$ (7) $\log(5x)$ (8) $\log(x+5)$
(9) $\log(x^5+1)$ (10) $(x-1)^5(x+1)^3$ (11) $\sin 3x$ (12) $\sin x \cos x$ (13) $\tan 3x$
(14) $\frac{1}{\cos^2 x}$ (15) $\sin \log x$ (16) $\cos e^x$ (17) $\tan(e^{-x^2})$ (18) $\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$ (19) $\sqrt{x^2+1}$
(20) $e^x \log x$ (21) $e^x \sin x$ (22) $e^x \cos x$ (23) $e^x \tan x$ (24) $\frac{3x^2-7x+3}{3x-1}$
(25) $\sqrt[3]{4-x^2}$ (26) $\sqrt[3]{\frac{x+1}{x-1}}$ (27) $\sin^3(2x+1)$ (28) $\log_x 2$ (29) $\frac{1-\sin x}{\cos x}$
(30) $\log \left| \frac{1-3x}{1+3x} \right|$

関数 6.2 次の関数の 2 次導関数を計算せよ。ただし a, b は定数とする。

- (1) $\log x$ (2) e^{2x} (3) $\sin x$ (4) $\cos x$ (5) $\tan x$ (6) $\frac{1}{\cos^2 x}$ (7) $e^{ax} \cos bx$

関数 6.3 次の関数の増減表(凹凸も調べよ)を書き, グラフの概形を描け。(ただし, (3) の凹凸は調べなくても良い。)

- (1) $y = e^{-\frac{x^2}{2}}$ (2) $y = \frac{1}{1+x^2}$ (3) $y = \frac{x}{1+x^2}$

7 積分

問題 7.1 以下を計算せよ。

$$(1) \int e^{3x} dx \quad (2) \int \frac{1}{x} dx \quad (3) \int \log x dx \quad (4) \int \sin 3x dx \quad (5) \int x \sin x^2 dx$$
$$(6) \int x \sin x dx \quad (7) \int \cos x dx \quad (8) \int \frac{dx}{\cos^2 x} \quad (9) \int \tan x dx$$

問題 7.2 以下を計算せよ。

$$(1) \int_0^1 e^{3x} dx \quad (2) \int_1^3 \frac{1}{x} dx \quad (3) \int_0^3 \frac{x}{1+x^2} dx \quad (4) \int_0^1 \frac{dx}{1+x^2} \quad (5) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x dx$$
$$(6) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin 3x dx \quad (7) \int_0^{\frac{\pi}{2}} x \sin 3x dx \quad (8) \int_0^{\frac{\pi}{2}} x^2 \cos 2x dx \quad (9) \int_0^1 \frac{dx}{(1+x^2)^2}$$
$$(10) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 x dx \quad (11) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin 2x \sin x dx \quad (12) \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{\sin 2x} \quad (13) \int_1^3 \log x dx$$
$$(14) \int_1^3 x^2 \log x dx \quad (15) \int_{\frac{1}{2}}^2 x^2 \log(2x) dx \quad (16) \lim_{A \rightarrow \infty} \int_1^A e^{-3x} dx \quad (17) \lim_{A \rightarrow \infty} \int_0^A x e^{-2x} dx$$
$$(18) \lim_{A \rightarrow \infty} \int_1^A \frac{dx}{x^4} \quad (19) \int_0^{\frac{1}{2}} \sin^3 x \cos x dx \quad (20) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^4 x dx \quad (21) \int_0^1 (2x+1)^{10} dx$$
$$(22) \int_0^1 x(2x+1)^{10} dx \quad (23) \int_0^1 \frac{e^x}{e^x+1} dx \quad (24) \int_0^1 \frac{e^{2x}}{e^x+1} dx \quad (25) \int_0^\pi e^{-x} \sin x dx$$
$$(26) \int_0^\pi e^{-x} \cos x dx \quad (27) \int_0^1 x e^{-x^2} dx$$